

Metodi numerici per le equazioni differenziali alle derivate parziali; volumi finiti
 Il metodo dei volumi finiti può essere impiegato per la risoluzione di equazioni paraboliche e iperboliche sia del I che del II ordine. Ecco alcuni esempi in cui è possibile applicare il metodo;

- trasporto

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \partial_t u + \partial_x (a u) = 0, f(u) = a u$$

- conservazione massa (fluidi, traffico veicolare, ecc.):

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho \cdot v(\rho)) = 0 \quad f(\rho) = \rho \cdot v(\rho)$$

In cui ρ è la densità, $v(\rho)$ la velocità;

- equazione di Burgers:

$$\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0 \quad f(u) = \frac{u^2}{2}$$

In cui u è la velocità del fluido;

- equazione di Eulero (conservazione massa, quantità di moto, ecc.):

$$\partial_x (\rho u^2) + \partial_y (\rho u v) = -\partial_y p$$

Consideriamo in particolare un'equazione iperbolica del I ordine (u scalare o vettoriale):

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(x_0) = u_0(x) \end{cases} \text{ c.i.} \quad u = u(x, t) \text{ soluzione } \forall x, \forall t$$

Nel caso vettoriale si ha un sistema di iperboliche. Si può restringere il problema alle due dimensioni:

$$\partial_t u + \partial_x f(u) + \partial_y g(u) = 0$$

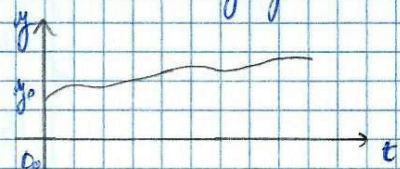
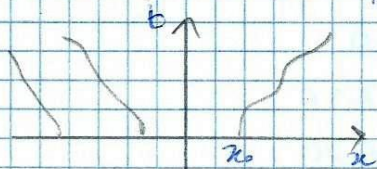
Un altro esempio trattabile con i volumi finiti è costituito dalle quat citate equazione di Burgers che rappresenta il più semplice modello non lineare della fluidodinamica.

Infatti $f(u) = \frac{u^2}{2}$.

Introduciamo a questo punto le curve caratteristiche nel piano x, t . Si dice caratteristica la curva $X(t)$ che è soluzione del problema seguente (che contiene una ODE):

$$\begin{cases} X'(t) = f'(u(X(t), t)) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases} \text{ scrivibile anche come: } \begin{cases} y'(t) = f(y(t), t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

In cui u è soluzione, generalmente non nota. Graficamente:



Possiamo definire una curva caratteristica per ogni punto dell'asse \mathbb{R} , mentre la soluzione u varia lungo ciascuna di esse. Per questo si indica $u(x(t), t)$ con $x = X(t)$: u è riferita a una caratteristica. Derivando si ottiene:

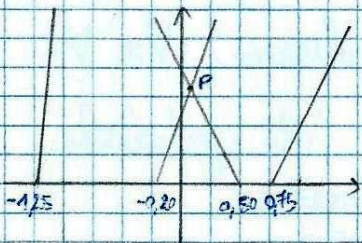
$$\partial_t u + f'(u) \cdot \partial_x u = \partial_t u(x(t), t) + \partial_x u(x(t), t) \cdot f'(u(x(t), t)) = 0$$

In cui f è funzione solo di u , quindi la funzione e derivata rispetto a u stessa.

Se vogliamo descrivere la variazione di u lungo le caratteristiche dobbiamo eseguire la derivata totale:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(x(t), t) &= \partial_x u(x(t), t) \cdot X'(t) + \partial_t u(x(t), t) = \\ &= \partial_x u(x(t), t) \cdot f'(u(x(t), t)) + \partial_t u(x(t), t) = 0 \end{aligned}$$

Essendo u soluzione di $\partial_t u + f'(u) \cdot \partial_x u = 0 \quad \forall x, \forall t$, essa è soluzione anche lungo la caratteristica $x = X(t)$. Ne segue che $u(x(t), t)$ soddisfa l'equazione, cioè la derivata totale è nulla. Per tanto u è costante lungo le caratteristiche, assumendo il valore iniziale $u_0(x_0)$. Inoltre $f'(u_0(x_0))$ non dipende da t ed è pari ad una costante. Se la derivata prima è costante la soluzione (cioè la curva caratteristica) sarà una retta:



$$\begin{cases} X'(t) = f'(u_0(x_0)) \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

Nel punto P c'è uno shock perché non è possibile che esistano due valori diversi contemporaneamente.

Per poter trovare una soluzione al problema iniziale (iperbolico), soluzione analitica, non numerica, è necessario introdurre una condizione iniziale che porta alla formulazione del seguente problema di Riemann:

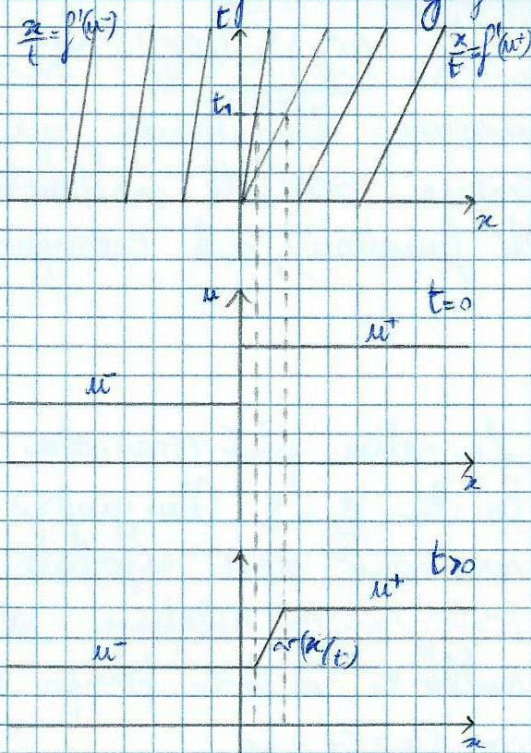
$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} u^- & x < 0 \\ u^+ & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Il problema con condizione iniziale qualsiasi è detto di Cauchy. Nel caso dell'equazione di Burgers il problema di avere:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (u^2/2) = 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} u^- & x < 0 \\ u^+ & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

La presenza di due velocità differenti conduce a due evoluzioni diverse:

I caso: $u^- < u^+$. Le caratteristiche divergono, ovvero non si manifesta uno shock (non c'è intersezione tra le caratteristiche che per $x < 0$ e quelle per $x > 0$ al di fuori di $x=0$, punto da cui "si diramano"). La soluzione è continua ed è detta "onda di rarefazione". Graficamente si ha:



La soluzione è costante lungo le rette caratteristiche che hanno pendenza $\pm f'(u_0(x_0))$. Cerchiamo quindi una funzione costante lungo le rette $x/t = \text{cost}$. Abbiamo che, da $t=0$ per l'istante universale $t=0$, in cui u^- e u^+ sono raccordate da un tratto verticale, è necessario unire con una retta inclinata (si eccede in corrispondenza del tratto compresso tra l'ultima caratteristica con $f'(u^-)$ e la prima con $f'(u^+)$). Tra essi non sono presenti altre caratteristiche.

per questo per ogni valore di $t > 0$ si trova una certa distanza, ma che cresce, tra la "fine" della semiretta u^- e l'"inizio" della semiretta u^+ .

Come evidenziato, deve essere $u(x,t) = v(\frac{x}{t})$. Sostituiamo in $\partial_t u + f'(u) \cdot \partial_x u = 0$:

$$\partial_t v(\frac{x}{t}) = v'(\frac{x}{t}) \cdot (-\frac{x}{t^2}) \quad \partial_x v(\frac{x}{t}) = v'(\frac{x}{t}) \cdot \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow -v'(\frac{x}{t}) \cdot \frac{x}{t^2} + f'(v(\frac{x}{t})) \cdot v'(\frac{x}{t}) \cdot \frac{1}{t} = 0$$

$$\Rightarrow v'(\frac{x}{t}) \left[f'(v(\frac{x}{t})) - \frac{x}{t} \right] = 0$$

Si presentano due possibilità:

• $v'(\frac{x}{t}) = 0$, cioè $v(\frac{x}{t}) = \text{cost} \Rightarrow$ soluzione banale: $u^- = u^+$

• $f'(v(\frac{x}{t})) = \frac{x}{t} \Rightarrow f'(u) = u$, $v(\frac{x}{t}) = \frac{x}{t}$:

$$u(x,t) = \begin{cases} u^- & x \leq \frac{x}{t} \\ v(\frac{x}{t}) = \frac{x}{t} & f'(u) < \frac{x}{t} < f'(u^+) \\ u^+ & x \geq \frac{x}{t} \end{cases}$$

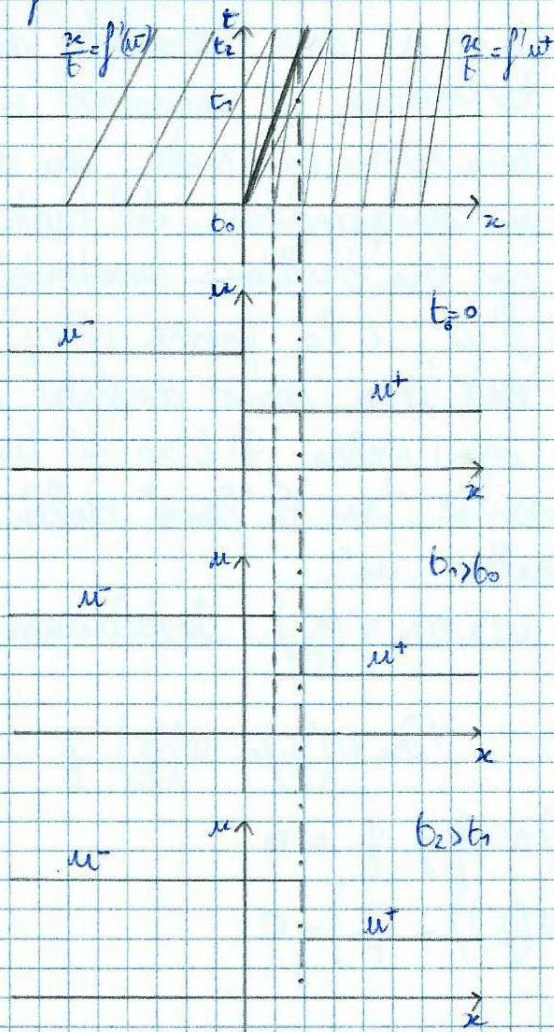
È la soluzione esatta per onde di rarefazione (per l'equazione di Burgers);

- Il caso $u^- > u^+$. Le caratteristiche convergono e la soluzione è un'onda d'urto o "onda di shock" ed è discontinua. La velocità della funzione è data dalle condizioni di Rankine-Hugoniot:

$$S = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$$

Mel caso di Burgers si ha $S = \frac{(u^+)^2 - (u^-)^2}{2(u^+ - u^-)}$. In realtà otteniamo derivando una funzione discontinua, quindi non derivabile. La derivazione rimane possibile mediante le distribuzioni (generalizzazioni di funzioni), ad esempio quella di Heaviside, $H' = \delta$.

Graficamente si ha:



La retta più marcata è data da $\frac{z}{t} = S$. Nel grafico successivo sono state riportate le configurazioni relative al tempo nullo e a due tempi t_1 e t_2 con $t_2 > t_1 > t_0$.

La velocità di propagazione dell'onda S consente di localizzare la discontinuità per ogni valore assunto da t : essa si sposta infatti con velocità S . Per questo dalle intersezioni tra b_1, b_2 e t_1, t_2 abbiamo dedotto i tre grafici di u .

La soluzione è:

$$u(x,t) = \begin{cases} u^- & \text{se } \frac{x}{t} < S \\ u^+ & \text{se } \frac{x}{t} > S \end{cases}$$

In questo secondo caso la velocità del fluido davanti è minore di quella dietro.

Facciamo un esempio considerando l'equazione di conservazione della massa nel caso del traffico stradale. Il problema iniziale e quello di Riemann sono:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0 \\ f(\rho) = \rho \cdot v(\rho) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho \cdot v(\rho)) = 0 \\ \rho(x, 0) = \begin{cases} \rho^- & x < 0 \\ \rho^+ & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Abbiamo l'andamento di ρ e quello di $v(\rho)$:



Abbiamo indicato con $v_{max} = 1$ la velocità massima assunta dai veicoli a basse densità ($\rho=0$), con $\rho_{max} = 1$ la massima densità (capacità) della strada che si verifica quando i veicoli sono fermi. I valori unitari sono stati assunti per semplicità. L'espressione $v(\rho) = 1 - \rho$ deriva quindi dall'equazione generica (lineare):

$$v(\rho) = v_{max} - \frac{v_{max}}{v_{min}} \rho$$

Che rappresenta il più semplice modello LWR (Lighthill - Whitham - Richards) poiché lineare. Che reggono $f(\rho) = \rho \cdot v(\rho) = \rho(1-\rho) = \rho - \rho^2$ e $f(\rho) = 1 - 2\rho$. Le caratteristiche sono:

$$x'(t) = f'(\rho(x_0)) = \begin{cases} f'(\rho^-) & x < 0 \\ f'(\rho^+) & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - 2\rho^- & x < 0 \\ 1 - 2\rho^+ & x > 0 \end{cases}$$

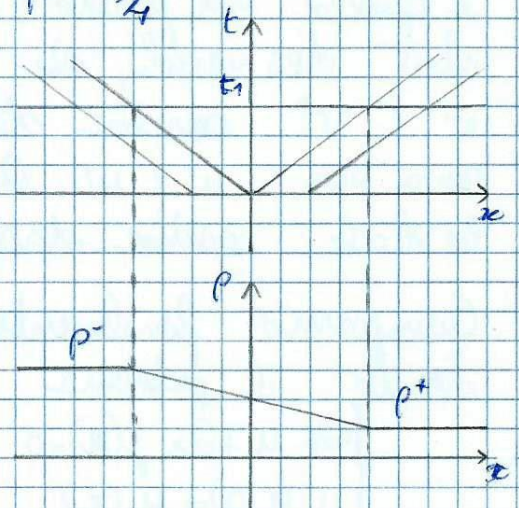
Lo poniamo ad esempio $\rho^- = \frac{3}{4}$ e $\rho^+ = \frac{1}{4}$:

$$x'(t) = \begin{cases} 1 - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}, & x < 0 \\ 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(v(\frac{x}{t})) = \frac{x}{t} \Rightarrow 1 - 2v(\frac{x}{t}) = \frac{x}{t}$$

$$\Rightarrow v(\frac{x}{t}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{x}{t} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{t} \right)$$

Essendo nota la $f'(\rho) = 1 - 2\rho$ è stato possibile ricavare esplicitamente l'espressione della velocità $v(x/t)$. Abbiamo analizzato il caso di onde di rarefazione. Per studiare

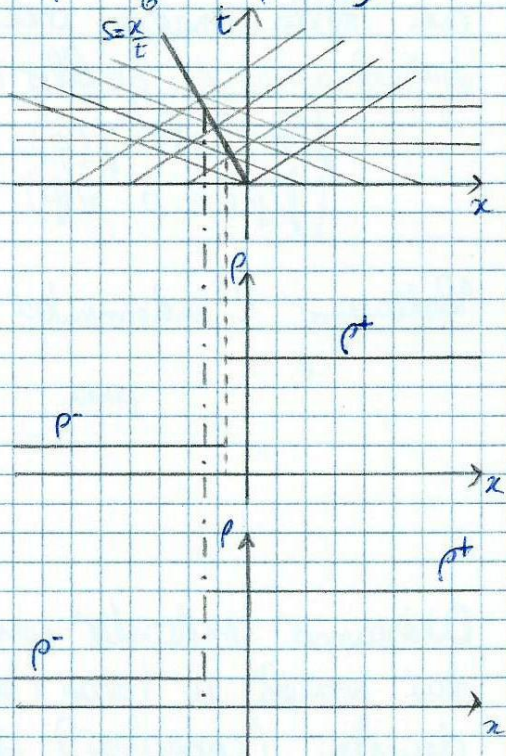


se l'onda di shock portiamo invece $\rho^- = \frac{1}{6}$ e $\rho^+ = \frac{2}{3}$:

$$x'(t) = \begin{cases} 1 - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, & x < 0 \\ 1 - 2 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}, & x > 0 \end{cases}$$

$$s = \frac{f(\rho^+) - f(\rho^-)}{\rho^+ - \rho^-} = \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right)}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow p(x,t) = \begin{cases} \rho^- & \text{se } \frac{x}{t} < s \\ \rho^+ & \text{se } \frac{x}{t} > s \end{cases}$$



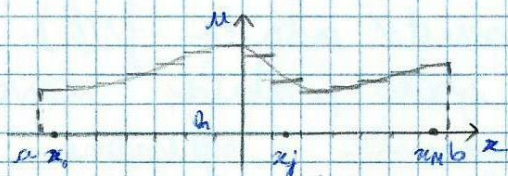
In cui $p(x,t)$ è la soluzione dell'equazione iperbolica nel caso di onda di shock, anche in questo

esempio la risultata marcata del primo grafico è la $s = \frac{x}{t}$ che definisce l'evoluzione temporale dell'onda di shock.

Il problema complessivo, prima di rarefazione, ora di shock, appare diverso da quello descritto, a livello fisico, considerando l'equazione di Burgers. Siamo infatti trattando un esempio relativo alla conservazione. Se per $x > 0$ la densità è maggiore la strada sarà occupata da più veicoli, quindi quelli che si avvicinano da destra, dove la densità è minore ($x < 0$) saranno costretti a rallentare. Pertanto la coda di veicoli si sposta all'indietro. Fisicamente il problema sembra opposto a quello del fluido; in realtà, se avessimo considerato la velocità dei veicoli, che diminuisce in $x > 0$, la relazione tra v^- e v^+ sarebbe stata identica a quella che intercorrerà tra u^- e u^+ . Altrettanto però che la direzione del shock sarebbe stata sempre all'indietro.

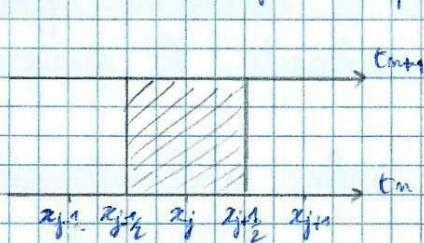
Giungiamo finalmente al metodo dei volumi finiti riprendendo il problema dell'iperbolico:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$



L'intervallo iniziale $[a, b]$ va discretizzato in intervalli

la di lunghezza h indicando con x_j il punto medio di ω_j ,
 punto di essi, $j=1, \dots, M$. Gli estremi vengono indicati con $x_{j-1/2}$
 e $x_{j+1/2}$. Si considera poi una u costante per ogni intervallo,
 lo, come indicato nella figura precedente. Si prende il valore me-
 dio dell'interfaccia tra ogni coppia di intervalli si ottiene
 un problema di Riemann. Successivamente si integra nello
 spazio e nel tempo l'equazione iperbolica:



$$u_{j,m} := \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_0(x) \cdot dx$$

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (\partial_t u + \partial_x f(u)) \cdot dx \cdot dt = 0$$

Integriamo alle derivate e valori finiti e ripetiamo i due inte-
 grali:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} [u(x, t_{m+1}) - u(x, t_m)] \cdot dx + \int_{t_m}^{t_{m+1}} [f(u(x_{j+1/2}, t)) - f(u(x_{j-1/2}, t))] \cdot dt = 0$$

Applichiamo la definizione di media: $u_{j,m} := \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_m) \cdot dx$:

$$h (u_{j,m+1} - u_{j,m}) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} [f(u(x_{j+1/2}, t)) - f(u(x_{j-1/2}, t))] \cdot dt = 0$$

$$\Rightarrow u_{j,m+1} = u_{j,m} - \frac{1}{h} \int_{t_m}^{t_{m+1}} [f(u(x_{j+1/2}, t)) - f(u(x_{j-1/2}, t))] \cdot dt$$

$m=1, 2, \dots$

flusso uscente

flusso entrante

Chiamiamo ora $u^*(u_{j,m}, u_{j+1,m})$ la soluzione del problema di
 Riemann in $x=0$ con $u = u_{j,m}$ e $u' = u_{j+1,m}$ ($m=1, 2, \dots$)

$$u_{j,m+1} = u_{j,m} - \frac{1}{h} \int_{t_m}^{t_{m+1}} [f(u^*(u_{j,m}, u_{j+1,m})) - f(u^*(u_{j+1,m}, u_{j,m}))] \cdot dt$$

In $x=0$ la soluzione del problema di Riemann non dipende dal
 tempo, quindi possiamo portare fuori dall'integrale:

$$u_{j,m+1} = u_{j,m} - \frac{dt}{h} [f(u^*(u_{j,m}, u_{j+1,m})) - f(u^*(u_{j+1,m}, u_{j,m}))] \quad m=1, 2, \dots$$

Otteniamo così la soluzione esatta seguendo lo schema di Godu-
 nov (ordine di precisione pari a 1). Chiamando $F_{j+1/2,m} = f(u^*(u_{j,m}, u_{j+1,m}))$ e

$$F_j = f(u^*(u_{j-1,m}, u_{j,m})):$$

$$u_{j,m+1} = u_{j,m} - \frac{dt}{h} (F_{j+1/2,m} - F_{j-1/2,m}) \quad m=1, 2, \dots$$

Con $F_{j+1/2,m}$ flusso numerico uscente e $F_{j-1/2,m}$ flusso numerico en-
 trante. È una grandezza che si conserva: per questo il
 method dei volumi finiti è adatto per le equazioni di con-
 servazione. Utilizziamo nota sul simbolismo adottato: ω_j

me grā accidub althove, i pebūi "m" e "m+1" non indieno deruboe mē dimensionū, me il passu iterubuo.

In generale lo schema dei volumi finiti si basa sul seguente algoritmo RFA (reconstruction-evolve-average), costituito dai seguenti passaggi:

- ricostruzione: dati i valori $u_{j,m}$ calcolati dallo schema numerico ricostruiamo $u_a(x, t_m)$, cioè la soluzione approssimata;
- evoluzione: calcolo degli $u_{j,m+1}$ mediante l'equazione con la quale il flusso numerico;
- media: si calcola la media dei valori nell'intervallo $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$.

Con l'ordine $u_a(x, t_m) = u_{j,m}$ e non c'è la fase di calcolo della media perché si prendono valori costanti sugli intervalli $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$. Per elevare il grado del metodo e rendere effettivo il calcolo della media si deve approssimare la $u_a(x, t_m)$ con una funzione lineare o tratti (retta) o con una serie di coniche. Per la retta:

$$u_a(x_j, t_m) = u_{j,m} + \sigma_{j,m} (x - x_j) \quad \text{pendenza } \sigma_{j,m} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x}$$

Nell'intervallo $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$. Si ottiene lo schema n di Lax-Wendroff. Talvolta appaiono oscillazioni in corrispondenza delle discontinuità, cioè delle onde di shock. Si vogliono allora le differenze finite decimate a destra e a sinistra per debbano minore la pendenza da scegliere. Se danno valori con ugual segno si sceglie il minore, altrimenti si sceglie pendenza nulla, cioè la funzione costante. In corrispondenza dei punti critici l'ordine di precisione è pari ad $n-1$.

$$\sigma_{j,m} = \text{minmod}\left(\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x}, \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x}\right), \quad \text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{se } |a| < |b|, a \cdot b > 0 \\ b & \text{se } |a| > |b|, a \cdot b > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Graficamente:

